

مبانی تحلیل غیر خطی-۱

معادله نیوتن-رافسون اصلاحات و روشهای حل آن

در نرم افزار ANSYS

فهرست مطالب

۲فهرست مطالب
۳۱- مقدمه
۳۲- روش نیوتن-رافسون
۶۳- همگرایی
۷۴- گزینه Predictor
۸۵- روش Adaptive Descent
۹۶- گزینه Line Search
۱۰۷- روش Arc-Length
۱۱۸- مرجع

فهرست تصاویر

۴شکل ۱ حل نیوتن-رافسون - یک تکرار
۵شکل ۲ حل نیوتن-رافسون تکرار بعدی (i+1)
۵شکل ۳ فرآیند نیوتن-رافسون بصورت گام به گام
۶شکل ۴ روش سختی اولیه در نیوتن-رافسون
۱۱شکل ۵ روش Arc-Length به همراه نیوتن-رافسون کامل

۱- مقدمه

در این گزارش بطور مختصر مبانی روش نیوتن-رافسون که برای حل سیستمهای غیر خطی بکار می رود معرفی شده و گزینه هایی که برای بهبود و یا اصلاح آن پیشنهاد شده اند مرور می شوند. هدف آن است که کاربر با دانستن ویژگیهای هر روش آنرا انتخاب کرده و در تحلیل مدل های غیر خطی بکار برد. گزینه های تحلیل غیر خطی معرفی شده در نرم افزار ANSYS بر مبنای روش نیوتن-رافسون تدوین شده و هر یک شامل اصلاحاتی هستند که به فرمولاسیون این روش اعمال شده است. این مبانی بطور کلی و تا حد امکان دور از ورود به جزئیات ریاضی ارائه شده است. با اینحال لازم است کاربر با مفاهیم ماتریس سختی و بردار جابجایی و نیرو و مفاهیم غیر خطی آشنا باشد. این گزارش از ترجمه بخش ۱۱-۱۵ راهنمای برنامه ANSYS تهیه شده است.

۲- روش نیوتن-رافسون^۱

روش اجزای محدود برای تحلیل سیستمهای سازه ای ابتدا درجات آزادی را تعریف کرده و ماتریس سختی سازه را تشکیل می دهد. گام بعدی حل دستگاه معادلات و تعیین جابجایی های مجهول است که به رابطه زیر منتهی می شود:

$$[K]\{u\} = \{F^a\} \quad ۱$$

که در آن:

$[K]$ ماتریس سختی،

$\{u\}$ بردار مقادیر درجات آزادی-DOF- مجهول،

و $\{F^a\}$ بردار نیروهای وارد شده است.

اگر ماتریس سختی خود تابعی از درجات آزادی مجهول $\{u\}$ (یا مشتقات آنها) باشد، آنگاه معادله ۱ معادله ای غیر خطی است.

روش نیوتن-رافسون فرآیندی تکراری را برای حل اینگونه معادلات غیر خطی ارائه می کند که به شکل زیر است:

$$[K_i^T]\{\Delta u_i\} = \{F^a\} - \{F_i^{nr}\} \quad ۲$$

$$\{u_{i+1}\} = \{u_i\} + \{\Delta u_i\} \quad ۳$$

که در آن:

$[K_i^T]$ ماتریس ژاکوبی یا ماتریس مماسی^۲،

i زیرنویس نمایش دهنده شماره تکرار و

$\{F_i^{nr}\}$ بردار نیروی بازگرداننده^۴ حاصل از نیروهای داخلی المانها است.

ماتریس $[K_i^T]$ و بردار $\{F_i^{nr}\}$ بر اساس مقادیر $\{u_i\}$ بدست می آیند. بخش سمت راست معادله ۲ بردار باقیمانده^۵ یا بردار

متعادل کننده است به معنی دیگر مقداری است که سیستم خارج از تعادل قرار گرفته است. نمونه ای از حل تک تکراری یک سیستم یکدرجه آزاد در شکل ۱ نشان داده شده است.

^۱Newton-Raphson Method

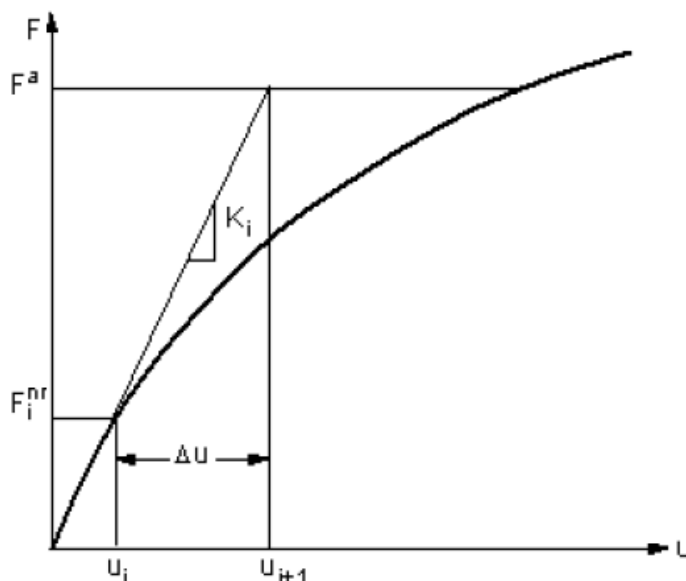
^۲ Jacobian Matrix

^۳ Tangent Matrix

^۴ Restoring Load Vector

چنانچه در شکل ۱ دیده می شود برای همگرایی^۶ تحلیل بیشتر از یک تکرار نیاز است. فرآیند کلی انجام تکرارها به شکل زیر است:

۱. فرض $\{u_0\}$. معمولاً تحلیل همگرا شده گام زمانی قبلی است. در اولین گام زمانی خواهیم داشت: $\{u_0\} = \{0\}$.
۲. ماتریس $[K_i^T]$ و بردار $\{F_i^{nr}\}$ از بردار $\{u_i\}$ محاسبه می شوند.
۳. بردار $\{\Delta u_i\}$ از معادله ۲ محاسبه می شود.
۴. $\{u_i\}$ و $\{\Delta u_i\}$ با یکدیگر جمع شده تا بردار $\{u_{i+1}\}$ بدست آید - معادله ۳.
۵. گامهای ۲ تا ۴ آنقدر تکرار می شوند تا تحلیل همگرا شود.



شکل ۱ حل نیوتن-رافسون - یک تکرار

شکل ۲ تکرار بعدی (i+1) تحلیل را در ادامه شکل ۱ نشان می دهد. تکرارهای بعدی بطور مشابه انجام می شوند. در پایان فرآیند تکراری، تحلیل باید به سطح نیروی $\{F^a\}$ رسیده باشد. تحلیل همگرا شده نهایی باید دارای تعادل باشد بطوریکه بردار نیروی بازگرداننده $\{F_i^{nr}\}$ (که از وضعیت تنشهای موجود محاسبه شده است) برابر با بردار نیروی $\{F^a\}$ گردد یا حداقل با تقریب مناسب نزدیک آن باشد. این تعادل در تکرارهای قبلی تحلیل رخ نخواهد داد.

در تحلیلهایی غیر خطی وابسته به مسیر^۷ مانند پلاستیسیته- برای اطمینان از صحت مسیر طی شده هنگام تحلیل لازم است که انجام آن بصورت گام به گام صورت گرفته و گامهای میانی پیش بینی شده باشد. به این ترتیب فرآیند نیوتن-رافسون برای هر گام تحلیل قابل استفاده است و فرمولبندی آن به شکل زیر اصلاح می شود:

$$[K_{n,i}^T] \{\Delta u_i\} = \{F_n^a\} - \{F_{n,i}^{nr}\} \quad ۴$$

که در آن:

$[K_{n,i}^T]$ ماتریس مماسی برای گام زمانی n - تکرار i

^۵ Residual Vector

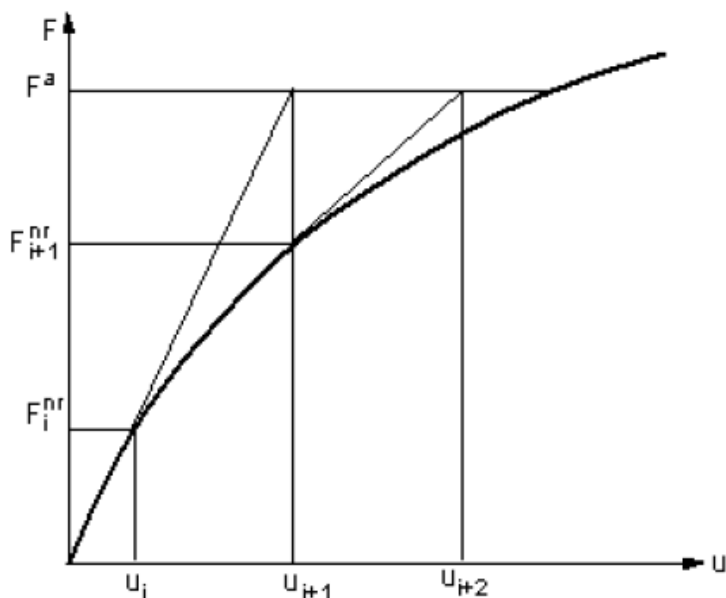
^۶ Converge

^۷ Path Dependence

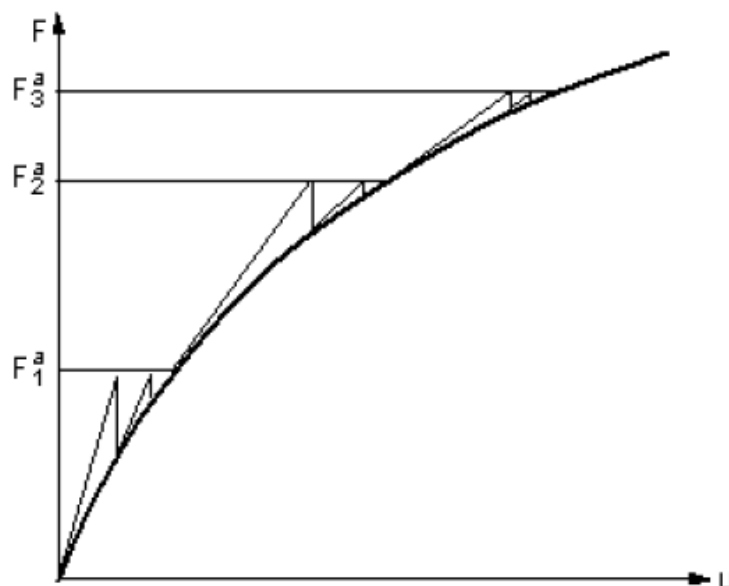
$\{F_n^a\}$ بردار کل نیروی وارد شده در گام زمانی n،

و $\{F_{n,i}^{nr}\}$ بردار نیروی بازگرداننده گام زمانی n - تکرار i است.

این فرآیند روش گام به گام نیوتن-رافسون^۱ نامیده می شود که در شکل ۳ جزئیات آن نشان داده شده است. روش نیوتن-رافسون همگرایی پاسخ را هنگامی تضمین می کند که اگر و تنها اگر پاسخ در هر تکرار با دقت کافی نزدیک به مقدار دقیق پاسخ باشد. در غیر این صورت لازم است از روش گام به گام برای دستیابی به پاسخ متناظر با بردار نیروی نهایی استفاده کرد.



شکل ۲ حل نیوتن-رافسون تکرار بعدی (i+1)



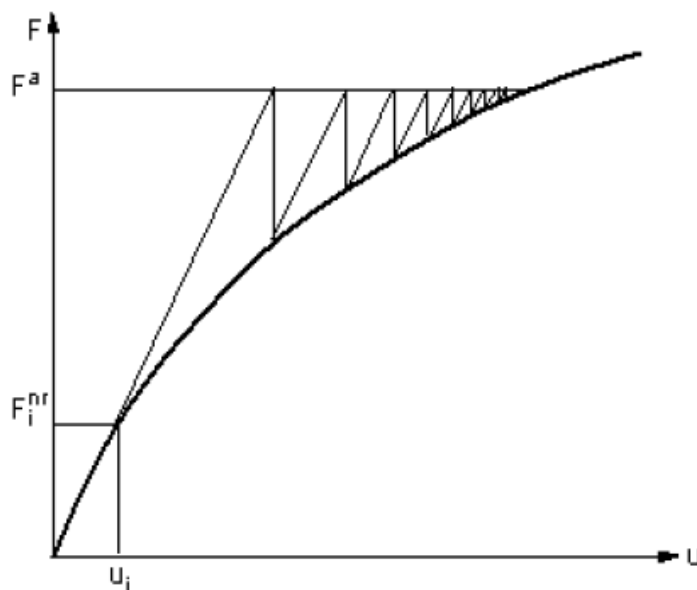
شکل ۳ فرآیند نیوتن-رافسون بصورت گام به گام

روشهای مختلفی در نرم افزار برای انجام تحلیل نیوتن-رافسون پیش بینی شده است که شامل نیوتن-رافسون کامل، اصلاح شده و سختی اولیه است. اگر ماتریس سختی در هر تکرار اصلاح شود روش تحلیلی نیوتن-رافسون کامل^۱ نامیده می شود که در نرم افزار

^۱ Incremental Newton Raphson Method

با گزینه **NROPT,FULL** فعال می شود. اما اگر لازم باشد که ماتریس سختی در تکرارهای کمتری اصلاح شود از روش نیوتن-رافسون اصلاح شده استفاده می شود که گزینه آن در نرم افزار **NROPT,MODI** است. در موارد خاصی که نیازمند اصلاح ماتریس سختی تنها در تکرار اول یا دوم هر گام زمانی باشد نیز می توان از فرآیند سختی اولیه^۱ با گزینه **NROPT,INIT** استفاده نمود. چنانچه در شکل ۴ دیده می شود روش سختی اولیه از اصلاح ماتریس سختی در تکرارهای بعدی ممانعت میکند.

بطور بدیهی در روشهای نیوتن-رافسون اصلاح شده و سختی اولیه وقوع همگرایی به مراتب دیرتر از روش نیوتن-رافسون کامل صورت خواهد گرفت اما در عین حال این دو روش نیازمند تغییر کمتری در فرمولاسیون ماتریس سختی و معکوس کردن آن خواهند بود بنابراین سرعت انجام محاسبات در آنها بیشتر است.



شکل ۴ روش سختی اولیه در نیوتن-رافسون

۳- همگرایی^{۱۲}

فرآیند تکراری تعریف شده در بخش قبل تا هنگامی ادامه می یابد که همگرایی رخ دهد. تعداد حداکثر مجاز تکرارها را می توان

به کمک دستور **NEQIT** تعیین نمود. همگرایی هنگامی تعریف می شود که:

$$\| \{R\} \| < \epsilon_R R_{ref} \quad \text{(همگرایی عدم تعادل)^{۱۳}} \quad ۵$$

و/یا

$$\| \{ \Delta u_i \} \| < \epsilon_u u_{ref} \quad \text{(همگرایی DOF Increment)^{۱۴}} \quad ۶$$

که در آنها $\{R\}$ بردار باقیمانده است که به شکل زیر محاسبه می شود:

^۹ Full Newton Raphson

^{۱۰} Modified Newton Raphson

^{۱۱} Initial Stiffness

^{۱۲} Convergence

^{۱۳} Out-of-Balance Convergence

^{۱۴} DOF Increment Convergence

$$\{R\} = \{F^a\} - \{F^{nr}\} \quad 7$$

که همان بخش سمت راست معادله نیوتن-رافسون است. بردار $\{u_i\}$ DOF Increment، ϵ_R و ϵ_u میزان خطا یا تیرانس (دستور CNVTOL) و R_{ref} و u_{ref} مقادیر مرجع هستند (دستور CNVTOL). $\|\cdot\|$ نیز اندازه بردار است.

به این ترتیب همگرایی هنگامی رخ می دهد که اندازه باقیمانده (عدم تعادل) کمتر از حاصلضرب خطا در مقدار مرجع بوده و/یا هنگامی که اندازه DOF Increment کمتر از حاصلضرب خطا در مقدار مرجع آن باشد. نرم افزار ANSYS بطور پیش فرض تنها همگرایی عدم تعادل را کنترل می کند و مقدار خطای پیش فرض در برنامه برابر 0.001 برای ϵ_u و ϵ_R است.

سه قاعده⁵ همگرایی در داخل برنامه پیش بینی شده است (مقدار NORM در CNVTOL) که عبارتند از:

$$1. \text{ قاعده نامحدود که در آن } \| \{R\} \|_{\infty} = \max |R_i| \text{ است،}$$

$$2. \text{ قاعده L1 که در آن } \| \{R\} \|_1 = \sum |R_i| \text{ است،}$$

$$3. \text{ و قاعده L2 که در آن } \| \{R\} \|_1 = (\sum R_i^2)^{0.5} \text{ است.}$$

برای همگرایی DOF Increment عبارت Δu به جای R در معادلات فوق قرار می گیرد. قاعده نامحدود به بیان ساده عبارت از حداکثر مقدار در بردار باقیمانده یا DOF Increment است، قاعده L1 برابر جمع قدر مطلق مقادیر و قاعده L2 مجذور جمع مربعات اجزای بردار باقیمانده یا DOF Increment است. پیش فرض برنامه قاعده L2 است.

مقدار پیش فرض R_{ref} برابر $\| \{F^a\} \|$ است. برای درجات آزادی که مقید شده اند بردار $\{F^{nr}\}$ برای محاسبه R_{ref} بکار می رود، برای درجات آزادی سازه ای اگر مقدار $\| \{F^a\} \|$ کمتر از 1 شود مقدار R_{ref} برابر 1 فرض می شود. این وضعیت اغلب هنگامی رخ می دهد که در تحلیل حرکت جسم صلب اتفاق افتد (چرخش بدون تنش).

۴- گزینه Predictor

پاسخ $\{u_{n,0}\}$ که برای شروع گام زمانی n بکار می رود اغلب برابر پاسخ DOF آخرین گام تحلیل شده قبلی یا $\{u_{n-1}\}$ فرض می شود و ماتریس مماسی $[K_{n,0}]$ و نیروی بازگرداننده $\{F^{n,0}\}$ بر اساس آن محاسبه می شوند. گزینه Predictor (دستور PRED در برنامه) برای بدست آوردن حدس بهتر، از برونمایی مقادیر DOF قبلی استفاده می کند. بطوریکه پیش بینی $\{u_{n,0}\}$ بر اساس تغییرات تجمعی جابجایی در گامهای زمانی قبلی ضرب در اندازه گام زمانی آنها صورت می گیرد:

$$\{u_{n,0}\} = \{u_{n-1}\} + \beta \{\Delta u_n\} \quad 8$$

که در آن n گام زمانی جاری و $\{\Delta u_n\}$ افزایش جابجایی تجمعی در گامهای زمانی قبلی است که بصورت زیر محاسبه می شود:

$$\{\Delta u_n\} = \sum_{i=1}^{NEQIT} \{\Delta u_i\} \quad 9$$

β نیز از رابطه زیر بدست می آید:

$$\beta = \frac{\Delta t_n}{\Delta t_{n-1}} \quad 10$$

که در آن Δt_n اندازه گام زمانی جاری و Δt_{n-1} اندازه گام زمانی قبلی است. β نباید بیشتر از 5 در نظر گرفته شود.

⁵Norm

در تحلیل‌های تاریخچه زمانی پیش بینی درجات آزادی سازه‌ای با استفاده از فرمول نیومارک بر اساس شتاب و سرعت به شکل زیر صورت می‌گیرد:

$$\{u_{n,0}\} = \{u_{n-1}\} + \{\dot{u}_{n-1}\}\Delta t_n + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\{\ddot{u}_{n-1}\}\Delta t_n^2 \quad 11$$

که در آن $\{u_{n,0}\}$ ، $\{\dot{u}_{n-1}\}$ و $\{\ddot{u}_{n-1}\}$ به ترتیب جابجایی سرعت و شتاب گام جاری هستند، Δt_n اندازه گام زمانی جاری و α پارامتر نیومارک است (دستور TINPT).

۵- روش Adaptive Descent^{۱۶}

روش Adaptive Descent^{۱۶} تکنیکی است که برای حل مشکل همگرایی، مقدار ماتریس سختی مماسی را افزایش می‌دهد. این تکنیک هنگامی که مشکل همگرایی وجود نداشته باشد از ماتریس کاملاً مماسی استفاده می‌کند که می‌تواند سرعت دستیابی به همگرایی را افزایش دهد.

در این تکنیک ماتریس بکار رفته در معادله نیوتن-رافسون به صورت جمع دو ماتریس زیر محاسبه می‌شود:

$$[K_i^T] = \xi [K^S] + (1 - \xi) [K^T] \quad 12$$

که در آن $[K^S]$ ماتریس سکانت (یا ماتریس پایدارتر)، $[K^T]$ ماتریس مماسی و ξ پارامتر کاهش می‌دهد.

برنامه هنگام تحلیل هر گام مقدار ξ را به صورت زیر محاسبه می‌کند:

۱. هر گام زمانی با استفاده از ماتریس مماسی آغاز می‌شود ($\xi = 0$).

۲. مقدار تغییرات باقیمانده $\|R\|$ طی هر تکرار کنترل می‌شود:

اگر مقدار آن افزایش یابد:

- اگر $\xi < 1$ پاسخ جاری را حذف کرده و مقدار ξ را برابر ۱ قرار داده و تکرار را مجدداً با ماتریس سکانت انجام می‌دهد.

- اگر ξ برابر ۱ است تکرارها را ادامه می‌دهد.

اگر $\|R\|$ کاهش یابد:

- اگر $\xi = 1$ شود (ماتریس سکانت) و $\|R\|$ تا سه تکرار کاهش یابد آنگاه ξ برابر 0.25 قرار داده شده و تکرار ادامه می‌یابد.

- اگر $\xi < 1$ باشد باز هم مقدار آن در 0.25 ضرب شده و تکرار ادامه می‌یابد. اگر $\xi = 0.0156$ باشد مقدار آن برابر صفر قرار داده می‌شود (ماتریس مماسی بکار می‌رود).

۳. اگر پیغام negative pivot نشان داده شود (که بیانگر ماتریس ill-Condition است) آنگاه:

- اگر $\xi < 1$ باشد تحلیل جاری پاک شده، مقدار $\xi = 1$ قرار داده شده و تحلیل با ماتریس سکانت تکرار می‌شود.

^{۱۶} ترجمه عبارت Adaptive Descent معادل کاهش تطبیقی است اما بدلیل نامأنوس بودن آن، اصل کلمه انگلیسی در متن فارسی بکار رفته است.

^{۱۷} گزینه adptky در دستور NROPT

• اگر $\xi = 1$ و گام زمانی اتوماتیک فعال باشد، گام زمانی دو بخش می شود در غیر اینصورت تحلیل پایان داده شده و متوقف می شود.

مسائل غیر خطی ای که از روش Adaptive Descent استفاده می کنند (یعنی در شرایط $\xi < 1$ ماتریس سکانت تشکیل می شود) شامل: پلاستیسیته، کانتک، Stress Stiffness همراه با Large Strain، المانهای بتنی Solid65 با Key option(7)=1 و المان غشایی Shell41 با Key option(1)=2 هستند. روش Adaptive Descent در برنامه بطور پیش فرض در حالتی فوق بکار می رود مگر آنکه گزینه های Line Search یا Arc-Length توسط کاربر فعال شده باشند. Adaptive Descent تنها در نیوتن-رافسون کامل هنگامی که ماتریسها در هر تکرار اصلاح می شوند قابل استفاده است. نیوتن - رافسون کامل نیز گزینه پیش فرض برای مسائل غیر خطی پلاستیسیته، Contact و Large Strain است.

۶- گزینه Line Search

گزینه^{۱۸} Line Search با ضرب یک مقدار ثابت در بردار پاسخ (که پارامتر Line Search نامیده می شود) حل نیوتن-رافسون را بهبود می بخشد. معادله ۳ را مجدداً در نظر بگیرید:

$$\{u_{i+1}\} = \{u_i\} + \{\Delta u_i\} \quad ۳$$

در برخی تحلیلها استفاده از مقدار کامل $\{\Delta u_i\}$ منجر به ناپایداری تحلیل می شود. با استفاده از گزینه Line Search معادله فوق بصورت زیر تغییر می کند:

$$\{u_{i+1}\} = \{u_i\} + s\{\Delta u_i\} \quad ۱۳$$

که در آن s پارامتر Line Search است و مقدار آن $0.05 < s < 1.0$ است. مقدار s بطور اتوماتیک با حداقل کردن انرژی سیستم و از معادله غیر خطی زیر بدست می آید:

$$g_s = \{u_i\}^T (\{F^a\} - \{F^{nr}(s\{\Delta u_i\})\}) \quad ۱۴$$

g_s گرادیان انرژی پتانسیل نسبت به s است. این معادله به روش regula-falsi و به صورت سعی و خطا قابل حل است. سعی و خطا تا زمانی ادامه می یابد که یکی از شرایط زیر برقرار شود:

۱. g_s کمتر از $0.5g_0$ شود. مقدار g_0 با مسای صفر قرار دادن s در معادله ۱۴ بدست می آید،

۲. تغییرات g_s بین سعی و خطاها ناچیز باشد.

۳. شش سعی و خطا به انجام رسیده باشد.

اگر $g_0 > 0.0$ باشد هیچ سعی و خطایی انجام نشده و s برابر ۱ قرار داده می شود. s نمی تواند کمتر از 0.05 در نظر گرفته شود. به این ترتیب مقدار $s\{\Delta u_i\}$ برای اصلاح مقادیر DOF $\{u_{i+1}\}$ بکار رفته و تکرار بعدی آغاز می شود.

^{۱۸} با دستور LNSRCH فعال می شود

۷- روش Arc-Length

روش^{۱۹} Arc-Length روشی مناسب برای تحلیل مسائل غیر خطی استاتیکی ناپایدار است. کاربرد Arc-Length در مسائلی است که مسیر نیرو-تغییر مکان پیچیده‌ای هنگام کمانش و پس از آن وجود دارد. در روش Arc-Length از متد Forde و Stiemer استفاده می‌شود. در این روش فرض می‌شود که مقدار کلیه نیروها تنها توسط یک اسکالر (ضریب بار کلی) کنترل می‌شود. روش Arc-Length برای مسائلی که در آنها پاسخ نیرو - تغییر مکان دچار ناپیوستگی می‌شود (اغلب در مسائل مربوط به Contact ها و مصالح الاستو پلاستیک کامل بوجود می‌آید) نمی‌تواند کارایی مناسبی داشته باشد. به عبارت ریاضی روش Arc-Length بدنبال یافتن یک منحنی متعادل یکتا است که در فضای متغیرهای جابجایی گره‌ی و ضریب بار کلی تعریف می‌شود. بنابراین تمام گزینه-های روش نیوتن-رافسون همچنان قابل استفاده هستند.

چون بردارهای جابجایی و ضریب بار اسکالر مجهول هستند، روش Arc-Length بصورت اتوماتیک گامهای بارگذاری را تعریف می‌کند. بنابراین استفاده از گزینه AUTOTS دیگر لازم نیست. در مسائلی که چرخشهای قابل توجهی در مسیر نمودار نیرو-تغییر مکان اتفاق می‌افتد یا مسائلی که دارای مصالح وابسته به مسیر هستند (Path Dependence) لازم است که شعاع Arc-Length (یا همان اندازه گام بارگذاری) با استفاده از Initial Arc-Length radius محدود شود. روش Arc-Length هنگام تحلیل و در هر گام بارگذاری، شعاع Arc-Length را بسته به میزان غیر خطی بودن رفتار سیستم تغییر می‌دهد.

محدوده تغییرات شعاع Arc-Length توسط ضرایب حداکثر و حداقل با کمک گزینه های MAXARC و MINARC در دستور ARCLen محدود می‌شود. در فرآیند معادله غیر خطی ۲ بصورت زیر و بر اساس ضریب بار کلی دوباره نویسی می‌شود:

$$[K_i^T] \{\Delta u_i\} = \lambda \{F^a\} - \{F_i^{nr}\} \quad 15$$

که λ معمولاً در محدوده $1.0 > \lambda > -1.0$ قرار می‌گیرد. با دوباره نویسی معادله فوق بر حسب میزان افزایش λ در گام n و سعی خطای نام خواهیم داشت:

$$[K_i^T] \{\Delta u_i\} - \Delta \lambda \{F^a\} = (\lambda_n + \lambda_i) \{F^a\} - \{F_i^{nr}\} = -\{R_i\} \quad 16$$

که در آن $\Delta \lambda$ میزان افزایش λ است (شکل ۵). مطابق شکل ۵ مقدار $\{\Delta u_i\}$ را می‌توان به صورت دو قسمتی زیر دوباره نویسی کرد:

$$\{\Delta u_i\} = \Delta \lambda \{\Delta u_i^I\} + \{\Delta u_i^{II}\} \quad 17$$

که در آن:

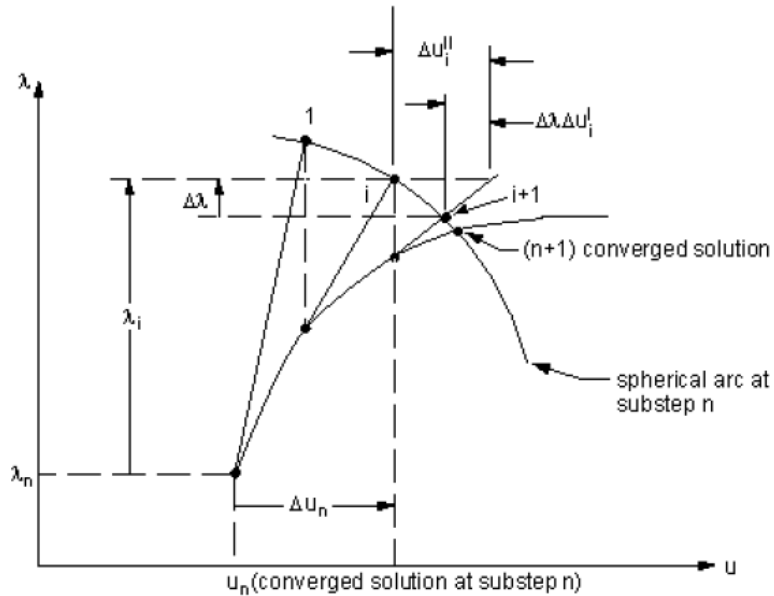
$$\{\Delta u_i^I\} = [K_i^T]^{-1} \{F^a\} \quad 18$$

$$\{\Delta u_i^{II}\} = -[K_i^T]^{-1} \{R_i\} \quad 19$$

هستند. در هر تکرار Arc-Length باید از معادلات ۱۸ و ۱۹ برای تعیین $\{\Delta u_i^I\}$ و $\{\Delta u_i^{II}\}$ استفاده شود. پارامتر $\Delta \lambda$ در معادله ۱۷ نیز از معادله Arc-Length در تکرار نام بصورت زیر تعیین می‌شود (مطابق تصویر ۵):

$$l_i^2 = \lambda_i^2 + \beta^2 \{\Delta u_n\}^T \{\Delta u_n\} \quad 20$$

^{۱۹} با دستور ARCLen,ON فعال می‌شود



شکل ۵ روش Arc-Length به همراه نیوتن-رافسون کامل

که در آن β ضریب مقیاس از نوع جابجایی، Δu_n مجموع Δu_i در این تکرار و l_i شعاع Arc-Length است که:

$$l_i = l_{i-1} = \dots = l_1 \quad 21$$

مقدار l_1 در تکرار ۱ در هر گام بارگذاری با استفاده از شعاع اولیه Arc-Length در دستور NSUBT، محدوده تعریف شده برای l در دستور ARCLEN و بعضی روابط تعیین اتوماتیک گام زمانی تعیین می شود. در نهایت بردارهای پاسخ بصورت زیر محاسبه می-

شوند:

$$\{u_{i+1}\} = \{u_n\} + \{\Delta u_n\} + \{\Delta u_i\} \quad 22$$

و

$$\lambda_{i+1} = \lambda_n + \lambda_i + \Delta \lambda \quad 23$$

که n شماره گام بارگذاری است. مقادیر λ_n و $\Delta \lambda$ در POST26 در دسترسند.

۸- مرجع

1. ANSYS Manual v10.0, Theory Reference, Chapter 15. Analysis Tools.