مبانی تحلیل غیر خطی-۱

معادله نیوتن-رافسون اصلاحات و روشهای حل آن

در نرم‌افزار ANSYS

AHR 92-06

ANSYS HELP.IR

تهیه و تنظیم: محمد جواد جبارزاده
Web: www.AnsysHelp.ir
Email: AnsysHelp.ir@gmail.com

دهم تیر نود و دو

ویرایش اول

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

۱- مقدمه

در این گزارش بطور مختصر مبانی روش نیوتن-رافسون که برای حل سیستمهای غیر خطی بکار می‌رود معرفی شده و گزینه هایی که برای بهبود و یا اصلاح آن پیشنهاد شده‌اند مرور می‌شوند. هدف آن است که کاربر با دانستن ویژگیهای هر روش آنرا انتخاب کرده و در تحلیل مدلهای غیر خطی بکار برد. گزینه‌های تحلیل غیر خطی معرفی شده در نرم افزار ANSYS بر مبنای روش نیوتن-رافسون تدوین شده و هر یک شامل اصلاحاتی هستند که به فرمولاسیون این روش اعمال شده است. این مبانی بطور کلی و تا حد امکان دور از ورود به جزئیات ریاضی ارائه شده است. با اینحال لازم است کاربر با مفاهیم ماتریس سختی و بردار جابجایی و نیرو و مفاهیم غیر خطی آشنا باشد. این گزارش از ترجمه بخش ۱۱-۱۵ راهنمای برنامه ANSYS تهیه شده است.

۲- روش نیوتن-رافسون[1]

روش اجزای محدود برای تحلیل سیستمهای سازه ای ابتدا درجات آزادی را تعریف کرده و ماتریس سختی سازه را تشکیل می-دهد. گام بعدی حل دستگاه معادلات و تعیین جابجایی‌های مجهول است که به رابطه زیر منتهی می‌شود:

$$[K]\{u\}=\{F^a\} \quad (1)$$

که در آن:

$[K]$ماتریس سختی،

$\{u\}$بردار مقادیر درجات آزادی-DOF- مجهول،

و $\{F^a\}$بردار نیروهای وارد شده است.

اگر ماتریس سختی خود تابعی از درجات آزادی مجهول $\{u\}$ (یا مشتقات آنها) باشد، آنگاه معادله ۱ معادله‌ای غیر خطی است.

روش نیوتن-رافسون فرآیندی تکراری را برای حل اینگونه معادلات غیر خطی ارائه می‌کند که به شکل زیر است:

$$[K_i^T]\{\Delta u_i\}=\{F^a\}-\{F_i^{nr}\} \quad (2)$$

$$\{u_{i+1}\}=\{u_i\}+\{\Delta u_i\} \quad (3)$$

که در آن:

$[K_i^T]$ ماتریس ژاکوبی[2] یا ماتریس مماسی[3]،

i زیرنویس نمایش دهنده شماره تکرار و

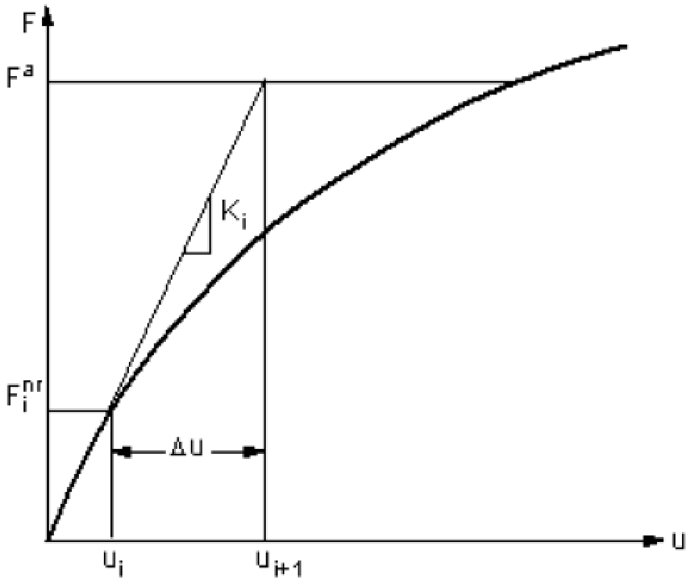
$\{F_i^{nr}\}$ بردار نیروی بازگرداننده[4] حاصل از نیروهای داخلی المانها است.

ماتریس $[K_i^T]$ و بردار $\{F_i^{nr}\}$ بر اساس مقادیر $\{u_i\}$ بدست می‌آیند. بخش سمت راست معادله ۲ بردار باقیمانده[5] یا بردار متعادل کننده است به معنی دیگر مقداری است که سیستم خارج از تعادل قرار گرفته است. نمونه ای از حل تک تکراری یک سیستم یکدرجه آزاد در شکل ۱ نشان داده شده است.

[1] Newton-Raphson Method
[2] Jacobian Matrix
[3] Tangent Matrix
[4] Restoring Load Vector
[5] Residual Vector

چنانچه در شکل ۱ دیده می‌شود برای همگرایی[۶] تحلیل بیشتر از یک تکرار نیاز است. فرآیند کلی انجام تکرارها به شکل زیر است:

۱. فرض $\{u_0\}$. $\{u_0\}$ معمولاً تحلیل همگرا شده گام زمانی قبلی است. در اولین گام زمانی خواهیم داشت: $\{u_0\}=\{0\}$،
۲. ماتریس $[K_i^T]$ و بردار $\{F_i^{nr}\}$ از بردار $\{u_i\}$ محاسبه می‌شوند،
۳. بردار $\{\Delta u_i\}$ از معادله ۲ محاسبه می‌شود،
۴. $\{\Delta u_i\}$ و $\{u_i\}$ با یکدیگر جمع شده تا بردار $\{u_{i+1}\}$ بدست آید – معادله ۳،
۵. گامهای ۲ تا ۴ آنقدر تکرار می‌شوند تا تحلیل همگرا شود.



شکل ۱ حل نیوتن-رافسون – یک تکرار

شکل ۲ تکرار بعدی (i+1) تحلیل را در ادامه شکل ۱ نشان می‌دهد. تکرارهای بعدی بطور مشابه انجام می‌شوند. در پایان فرآیند تکراری، تحلیل باید به سطح نیروی $\{F^a\}$ رسیده باشد. تحلیل همگرا شده نهایی باید دارای تعادل باشد بطوریکه بردار نیروی بازگرداننده $\{F_i^{nr}\}$ (که از وضعیت تنشهای موجود محاسبه شده است) برابر با بردار نیروی $\{F^a\}$ گردد یا حداقل با تقریب مناسب نزدیک آن باشد. این تعادل در تکرارهای قبلی تحلیل رخ نخواهد داد.

در تحلیلهایی غیر خطی وابسته به مسیر[۷] -مانند پلاستیسیته- برای اطمینان از صحت مسیر طی شده هنگام تحلیل لازم است که انجام آن بصورت گام به گام صورت گرفته و گامهای میانی پیش بینی شده باشد. به این ترتیب فرآیند نیوتن-رافسون برای هر گام تحلیل قابل استفاده است و فرمولبندی آن به شکل زیر اصلاح می‌شود:

$$[K_{n,i}^T]\{\Delta u_i\}=\{F_n^a\}-\{F_{n,i}^{nr}\} \qquad ۴$$

که در آن:

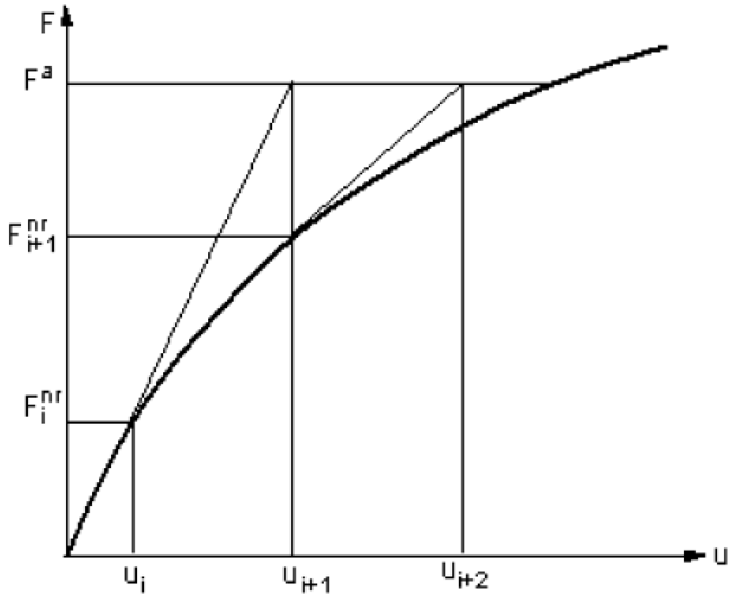
$[K_{n,i}^T]$ ماتریس مماسی برای گام زمانی n – تکرار i،
$\{F_n^a\}$ بردار کل نیروی وارد شده در گام زمانی n،

---

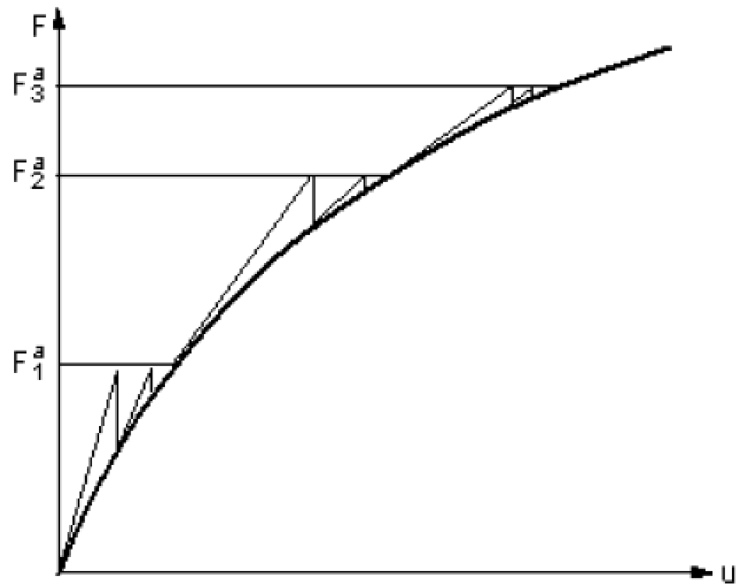
[6] Converge
[7] Path Dependence

و $\{F_{n,i}^{nr}\}$ بردار نیروی بازگرداننده گام زمانی n – تکرار i است.

این فرآیند روش گام به گام نیوتن-رافسون[8] نامیده می‌شود که در شکل ۳ جزئیات آن نشان داده شده است. روش نیوتن-رافسون همگرایی پاسخ را هنگامی تضمین می‌کند که اگر و تنها اگر پاسخ در هر تکرار با دقت کافی نزدیک به مقدار دقیق پاسخ باشد. در غیر این صورت لازم است از روش گام به گام برای دستیابی به پاسخ متناظر با بردار نیروی نهایی استفاده کرد.



شکل ۲ حل نیوتن-رافسون تکرار بعدی (i+1)



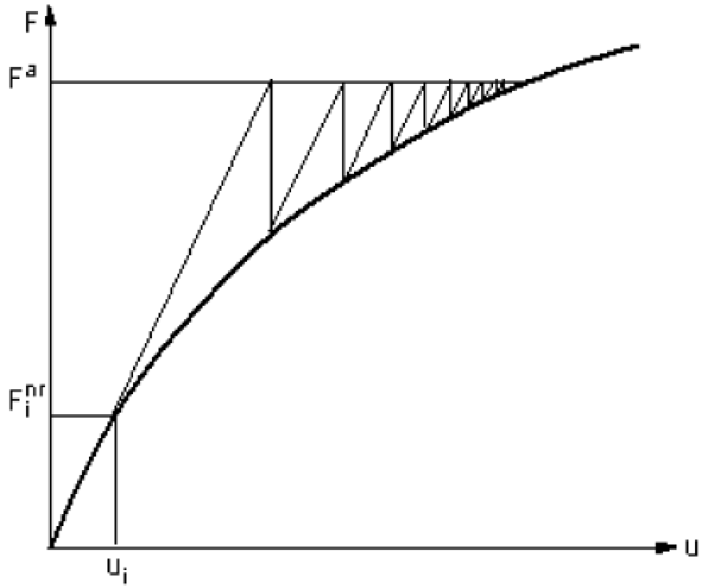
شکل ۳ فرآیند نیوتن-رافسون بصورت گام به گام

روشهای مختلفی در نرم افزار برای انجام تحلیل نیوتن-رافسون پیش بینی شده است که شامل نیوتن-رافسون کامل، اصلاح شده و سختی اولیه است. اگر ماتریس سختی در هر تکرار اصلاح شود روش تحلیلی نیوتن-رافسون کامل[9] نامیده می‌شود که در نرم‌افزار

[8] Incremental Newton Raphson Method
[9] Full Newton Raphson

با گزینه **NROPT**,FULL فعال می‌شود. اما اگر لازم باشد که ماتریس سختی در تکرارهای کمتری اصلاح شود از روش نیوتن-رافسون اصلاح شده[10] استفاده می‌شود که گزینه آن در نرم‌افزار **NROPT**,MODI است. در موارد خاصی که نیازمند اصلاح ماتریس سختی تنها در تکرار اول یا دوم هر گام زمانی باشد نیز می‌توان از فرآیند سختی اولیه[11] با گزینه **NROPT**,INIT استفاده نمود. چنانچه در شکل ۴ دیده می‌شود روش سختی اولیه از اصلاح ماتریس سختی در تکرارهای بعدی ممانعت میکند.

بطور بدیهی در روشهای نیوتن-رافسون اصلاح شده و سختی اولیه وقوع همگرایی به مراتب دیرتر از روش نیوتن-رافسون کامل صورت خواهد گرفت اما در عین حال این دو روش نیازمند تغییر کمتری در فرمولاسیون ماتریس سختی و معکوس کردن آن خواهند بود بنابراین سرعت انجام محاسبات در آنها بیشتر است.



شکل ۴ روش سختی اولیه در نیوتن-رافسون

۳– همگرایی[12]

فرآیند تکراری تعریف شده در بخش قبل تا هنگامی ادامه می‌یابد که همگرایی رخ دهد. تعداد حداکثر مجاز تکرارها را می‌توان به کمک دستور NEQIT تعیین نمود. همگرایی هنگامی تعریف می‌شود که:

۵ (همگرایی عدم تعادل[13]) $$\|\{R\}\| < \varepsilon_R R_{ref}$$

و/یا

۶ (همگرایی DOF Increment[14]) $$\|\{\Delta u_i\}\| < \varepsilon_u u_{ref}$$

که در آنها $\{R\}$ بردار باقیمانده است که به شکل زیر محاسبه می‌شود:

۷ $$\{R\} = \{F^a\} - \{F^{nr}\}$$

---

10 Modified Newton Raphson
11 Initial Stiffness
12 Convergence
13 Out-of-Balance Convergence
14 DOF Increment Convergence

که همان بخش سمت راست معادله نیوتن-رافسون است. $\{u_i\}$ بردار DOF Increment، ε_R و ε_u میزان خطا یا تلرانس (دستور CNVTOL) و R_{ref} و u_{ref} مقادیر مرجع هستند (دستور CNVTOL). $\|*\|$ نیز اندازه بردار است.

به این ترتیب همگرایی هنگامی رخ می‌دهد که اندازه باقیمانده (عدم تعادل) کمتر از حاصلضرب خطا در مقدار مرجع بوده و/یا هنگامی که اندازه DOF Increment کمتر از حاصلضرب خطا در مقدار مرجع آن باشد. نرم افزار ANSYS بطور پیش فرض تنها همگرایی عدم تعادل را کنترل می‌کند و مقدار خطای پیش فرض در برنامه برابر 0.001 برای ε_R و ε_u است.

سه قاعده[15] همگرایی در داخل برنامه پیش بینی شده است (مقدار NORM در CNVTOL) که عبارتند از:

۱. قاعده نامحدود که در آن $\|\{R\}\|_\infty = \max|R_i|$ است،

۲. قاعده L1 که در آن $\|\{R\}\|_1 = \sum|R_i|$ است،

۳. و قاعده L2 که در آن $\|\{R\}\|_1 = (\sum|R_i^2|)^{0.5}$ است.

برای همگرایی DOF Increment عبارت Δu به جای R در معادلات فوق قرار می‌گیرد. قاعده نامحدود به بیان ساده عبارت از حداکثر مقدار در بردار باقیمانده یا DOF Increment است، قاعده L1 برابر جمع قدر مطلق مقادیر و قاعده L2 مجذور جمع مربعات اجزای بردار باقیمانده یا DOF Increment است. پیش فرض برنامه قاعده L2 است.

مقدار پیش فرض R_{ref} برابر $\|\{F^a\}\|$ است. برای درجات آزادی که مقید شده‌اند بردار $\{F^{nr}\}$ برای محاسبه R_{ref} بکار می‌رود، برای درجات آزادی سازه ای اگر مقدار $\|\{F^a\}\|$ کمتر از ۱ شود مقدار R_{ref} برابر ۱ فرض می‌شود. این وضعیت اغلب هنگامی رخ می‌دهد که در تحلیل حرکت جسم صلب اتفاق افتد (چرخش بدون تنش).

۴- گزینه Predictor

پاسخ $\{u_{n,0}\}$ که برای شروع گام زمانی n بکار می‌رود اغلب برابر پاسخ DOF آخرین گام تحلیل شده قبلی یا $\{u_{n-1}\}$ فرض می‌شود و ماتریس مماسی $[K_{n,0}]$ و نیروی بازگرداننده $\{F^{n,0}\}$ بر اساس آن محاسبه می‌شوند. گزینه Predictor (دستور PRED در برنامه) برای بدست آوردن حدس بهتر، از برونیابی مقادیر DOF قبلی استفاده می‌کند. بطوریکه پیش بینی $\{u_{n,0}\}$ بر اساس تغییرات تجمعی جابجایی در گامهای زمانی قبلی ضرب در اندازه گام زمانی آنها صورت می‌گیرد:

$$\{u_{n,0}\} = \{u_{n-1}\} + \beta\{\Delta u_n\} \tag{۸}$$

که در آن n گام زمانی جاری و $\{\Delta u_n\}$ افزایش جابجایی تجمعی در گامهای زمانی قبلی است که بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\{\Delta u_n\} = \sum_{i=1}^{NEQIT}\{\Delta u_i\} \tag{۹}$$

β نیز از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\beta = \frac{\Delta t_n}{\Delta t_{n-1}} \tag{۱۰}$$

که در آن Δt_n اندازه گام زمانی جاری و Δt_{n-1} اندازه گام زمانی قبلی است. β نباید بیشتر از ۵ در نظر گرفته شود.

[15] Norm

در تحلیلهای تاریخچه زمانی پیش بینی درجات آزادی سازه‌ای با استفاده از فرمول نیومارک بر اساس شتاب و سرعت به شکل زیر صورت می‌گیرد:

$$\{u_{n,0}\} = \{u_{n-1}\} + \{\dot{u}_{n-1}\}\Delta t_n + (\frac{1}{2} - \alpha)\{\ddot{u}_{n-1}\}\Delta t_n^2 \qquad ۱۱$$

که در آن $\{u_{n,0}\}$، $\{\dot{u}_{n-1}\}$ و $\{\ddot{u}_{n-1}\}$ به ترتیب جابجایی سرعت و شتاب گام جاری هستند، Δt_n اندازه گام زمانی جاری و α پارامتر نیومارک است (دستور TINPT).

۵– روش Adaptive Descent [۱۶]

روش Adaptive Descent[۱۷] تکنیکی است که برای حل مشکل همگرایی، مقدار ماتریس سختی مماسی را افزایش می‌دهد. این تکنیک هنگامی که مشکل همگرایی وجود نداشته باشد از ماتریس کاملاً مماسی استفاده می‌کند که می‌تواند سرعت دستیابی به همگرایی را افزایش دهد.

در این تکنیک ماتریس بکار رفته در معادله نیوتن-رافسون به صورت جمع دو ماتریس زیر محاسبه می‌شود:

$$\left[K_i^T\right] = \xi\left[K^S\right] + (1-\xi)\left[K^T\right] \qquad ۱۲$$

که در آن $\left[K^S\right]$ ماتریس سکانت (یا ماتریس پایدارتر)، $\left[K^T\right]$ ماتریس مماسی و ξ پارامتر کاهشی است.

برنامه هنگام تحلیل هر گام مقدار ξ را به صورت زیر محاسبه می‌کند:

۱. هر گام زمانی با استفاده از ماتریس مماسی آغاز می‌شود ($\xi = 0$)،

۲. مقدار تغییرات باقیمانده $\|\{R\}\|$ طی هر تکرار کنترل می‌شود:

اگر مقدار آن افزایش یابد:

- اگر $\xi < 1$ پاسخ جاری را حذف کرده و مقدار ξ را برابر ۱ قرار داده و تکرار را مجدداً با ماتریس سکانت انجام می‌دهد،
- اگر ξ برابر ۱ است تکرارها را ادامه می‌دهد.

اگر $\|\{R\}\|$ کاهش یابد:

- اگر $\xi = 1$ شود (ماتریس سکانت) و $\|\{R\}\|$ تا سه تکرار کاهش یابد آنگاه ξ برابر 0.25 قرار داده شده و تکرار ادامه می‌یابد.
- اگر $\xi < 1$ باشد باز هم مقدار آن در 0.25 ضرب شده و تکرار ادامه می‌یابد. اگر $\xi = 0.0156$ باشد مقدار آن برابر صفر قرار داده می‌شود (ماتریس مماسی بکار می‌رود).

۳. اگر پیغام negative pivot نشان داده شود (که بیانگر ماتریس ill-Condition است) آنگاه:

- اگر $\xi < 1$ باشد تحلیل جاری پاک شده، مقدار $\xi = 1$ قرار داده شده و تحلیل با ماتریس سکانت تکرار می‌شود.

---

[۱۶] ترجمه عبارت Adaptive Descent معادل کاهش تطبیقی است اما بدلیل نامأنوس بودن آن، اصل کلمه انگلیسی در متن فارسی بکار رفته است.

[۱۷] گزینه adptky در دستور NROPT

- اگر $\xi = 1$ و گام زمانی اتوماتیک فعال باشد، گام زمانی دو بخش می‌شود در غیر اینصورت تحلیل پایان داده شده و متوقف می‌شود.

مسائل غیر خطی‌ای که از روش Adaptive Descent استفاده می‌کنند (یعنی در شرایط $\xi < 1$ ماتریس سکانت تشکیل می‌شود) شامل: پلاستیسیته، کانتک، Stress Stiffness همراه با Large Strain، المانهای بتنی Solid65 با Key option(7)=1 و المان غشایی Shell41 با Key option(1)=2 هستند. روش Adaptive Descent در برنامه بطور پیش فرض در حالتهای فوق بکار می‌رود مگر آنکه گزینه‌های Line Search یا Arc-Length توسط کاربر فعال شده باشند. Adaptive Descent تنها در نیوتن-رافسون کامل هنگامی که ماتریسها در هر تکرار اصلاح می‌شوند قابل استفاده است. نیوتن – رافسون کامل نیز گزینه پیش فرض برای مسائل غیر خطی پلاستسیته، Contact و Large Strain است.

۶– گزینه Line Search

گزینه Line Search[۱۸] با ضرب یک مقدار ثابت در بردار پاسخ (که پارامتر Line Search نامیده می‌شود) حل نیوتن –رافسون را بهبود می‌بخشد. معادله ۳ را مجدداً در نظر بگیرید:

$$\{u_{i+1}\} = \{u_i\} + \{\Delta u_i\} \qquad ۳$$

در برخی تحلیلها استفاده از مقدار کامل $\{\Delta u_i\}$ منجر به ناپایداری تحلیل می‌شود. با استفاده از گزینه Line Search معادله فوق بصورت زیر تغییر می‌کند:

$$\{u_{i+1}\} = \{u_i\} + s\{\Delta u_i\} \qquad ۱۳$$

که در آن s پارامتر Line Search است و مقدار آن $0.05 < s < 1.0$ است. مقدار s بطور اتوماتیک با حداقل کردن انرژی سیستم و از معادله غیر خطی زیر بدست می‌آید:

$$g_s = \{u_i\}^T (\{F^a\} - \{F^{nr}(s\{\Delta u_i\})\}) \qquad ۱۴$$

g_s گرادیان انرژی پتانسیل نسبت به s است. این معادله به روش regula-falsi و به صورت سعی و خطا قابل حل است. سعی و خطا تا زمانی ادامه می‌یابد که یکی از شرایط زیر برقرار شود:

۱. g_s کمتر از $0.5g_0$ شود. مقدار g_0 با مساوی صفر قرار دادن s در معادله ۱۴ بدست می‌آید،
۲. تغییرات g_s بین سعی و خطاها ناچیز باشد.
۳. شش سعی و خطا به انجام رسیده باشد.

اگر $g_0 > 0.0$ باشد هیچ سعی و خطایی انجام نشده و s برابر ۱ قرار داده می‌شود. s نمی تواند کمتر از 0.05 در نظر گرفته شود. به این ترتیب مقدار $s\{\Delta u_i\}$ برای اصلاح مقادیر DOF $\{u_{i+1}\}$ بکار رفته و تکرار بعدی آغاز می‌شود.

---

[۱۸] با دستور LNSRCH فعال می‌شود

۷– روش Arc-Length

روش Arc-Length[19] روشی مناسب برای تحلیل مسائل غیر خطی استاتیکی ناپایدار است. کاربرد Arc-Length در مسائلی است که مسیر نیرو-تغییر مکان پیچیده‌ای هنگام کمانش و پس از آن وجود دارد. در روش Arc-Length از متد Forde و Stiemer استفاده می‌شود. در این روش فرض می‌شود که مقدار کلیه نیروها تنها توسط یک اسکالر (ضریب بار کلی) کنترل می‌شود. روش Arc-Length برای مسائلی که در آنها پاسخ نیرو – تغییر مکان دچار ناپیوستگی می‌شود (اغلب در مسائل مربوط به Contactها و مصالح الاستو پلاستیک کامل بوجود می‌آید) نمی‌تواند کارایی مناسبی داشته باشد. به عبارت ریاضی روش Arc-Length بدنبال یافتن یک منحنی متعادل یکتا است که در فضای متغیرهای جابجایی گره‌ی و ضریب بار کلی تعریف می‌شود. بنابراین تمام گزینه-های روش نیوتن-رافسون همچنان قابل استفاده هستند.

چون بردارهای جابجایی و ضریب بار اسکالر مجهول هستند، روش Arc-Length بصورت اتوماتیک گامهای بارگذاری را تعریف می‌کند. بنابراین استفاده از گزینه AUTOTS دیگر لازم نیست. در مسائلی که چرخشهای قابل توجهی در مسیر نمودار نیرو-تغییر مکان اتفاق می‌افتد یا مسائلی که دارای مصالح وابسته به مسیر هستند (Path Dependence) لازم است که شعاع Arc-Length (یا همان اندازه گام بارگذاری) با استفاده از Initial Arc-Length radius محدود شود. روش Arc-Length هنگام تحلیل و در هر گام بارگذاری، شعاع Arc-Length را بسته به میزان غیر خطی بودن رفتار سیستم تغییر می‌دهد.

محدوده تغییرات شعاع Arc-Length توسط ضرایب حداکثر و حداقل با کمک گزینه های MAXARC و MINARC در دستور ARCLEN محدود می‌شود. در فرآیند Arc-Length معادله غیر خطی ۲ بصورت زیر و بر اساس ضریب بار کلی دوباره نویسی می-شود:

$$\left[K_i^T\right]\left\{\Delta u_i\right\} = \lambda\left\{F^a\right\} - \left\{F_i^{nr}\right\} \qquad ۱۵$$

که λ معمولا در محدوده $-1.0 < \lambda < 1.0$ قرار می‌گیرد. با دوباره نویسی معادله فوق بر حسب میزان افزایش λ در گام n و سعی خطای iام خواهیم داشت:

$$\left[K_i^T\right]\left\{\Delta u_i\right\} - \Delta\lambda\left\{F^a\right\} = (\lambda_n + \lambda_i)\left\{F^a\right\} - \left\{F_i^{nr}\right\} = -\left\{R_i\right\} \qquad ۱۶$$

که در آن $\Delta\lambda$ میزان افزایش λ است (شکل ۵). مطابق شکل ۵ مقدار $\left\{\Delta u_i\right\}$ را می‌توان به صورت دو قسمتی زیر دوباره نویسی کرد:

$$\left\{\Delta u_i\right\} = \Delta\lambda\left\{\Delta u_i^I\right\} + \left\{\Delta u_i^{II}\right\} \qquad ۱۷$$

که در آن:

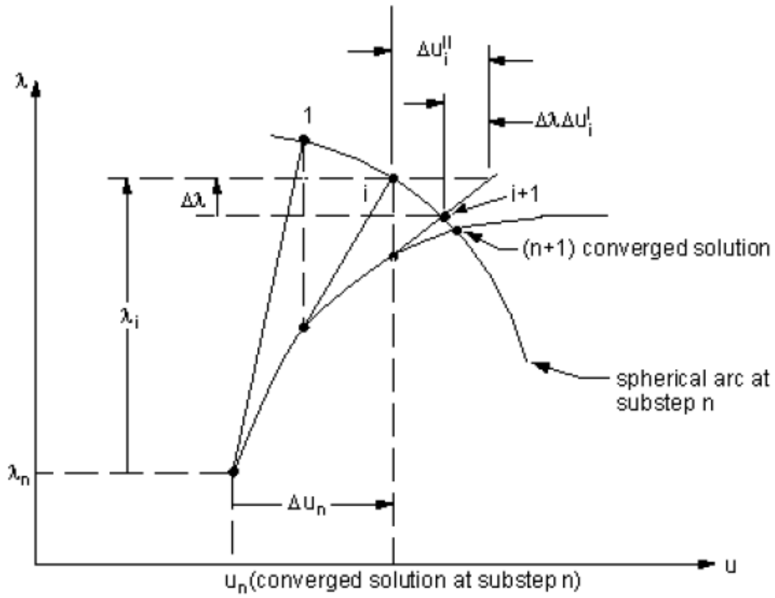
$$\left\{\Delta u_i^I\right\} = \left[K_i^T\right]^{-1}\left\{F^a\right\} \qquad ۱۸$$

$$\left\{\Delta u_i^{II}\right\} = -\left[K_i^T\right]^{-1}\left\{R_i\right\} \qquad ۱۹$$

هستند. در هر تکرار Arc-Length باید از معادلات ۱۸ و ۱۹ برای تعیین $\left\{\Delta u_i^I\right\}$ و $\left\{\Delta u_i^{II}\right\}$ استفاده شود. پارامتر $\Delta\lambda$ در معادله ۱۷ نیز از معادله Arc-Length در تکرار iام بصورت زیر تعیین می‌شود (مطابق تصویر ۵):

$$l_i^2 = \lambda_i^2 + \beta^2\left\{\Delta u_n\right\}^T\left\{\Delta u_n\right\} \qquad ۲۰$$

[19] با دستور ARCLEN,ON فعال می‌شود



شکل ۵ روش Arc-Length به همراه نیوتن-رافسون کامل

که در آن β ضریب مقیاس از نوع جابجایی، Δu_n مجموع Δu_i در این تکرار و l_i شعاع Arc-Length است که:

$$l_i = l_{i-1} = \cdots = l_1 \qquad (۲۱)$$

مقدار l_1 در تکرار ۱ در هر گام بارگذاری با استفاده از شعاع اولیه Arc-Length در دستور NSUBT، محدوده تعریف شده برای l در دستور ARCLEN و بعضی روابط تعیین اتوماتیک گام زمانی تعیین می‌شود. در نهایت بردارهای پاسخ بصورت زیر محاسبه می-شوند:

$$\{u_{i+1}\} = \{u_n\} + \{\Delta u_n\} + \{\Delta u_i\} \qquad (۲۲)$$

و

$$\lambda_{i+1} = \lambda_n + \lambda_i + \Delta\lambda \qquad (۲۳)$$

که n شماره گام بارگذاری است. مقادیر λ_n و $\Delta\lambda$ در POST26 دردسترسند.

۸- مرجع

1. ANSYS Manual v10.0, Theory Reference, Chapter 15. Analysis Tools.